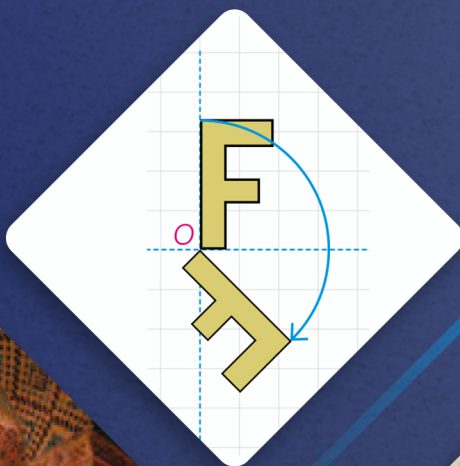


دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۱

هندسه ۲ (رشته ریاضی و فیزیک)



● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

سید محمد امیرحسین شاکری
۱۳۹۴/۰۵/۰۱گروه
ریاضیحسابان و
ریاضی پایهمسئول درس: علیرضا فاطمی
دستیار: مهدی پوررضایی

حسین شفیع زاده ● علیرضا فاطمی ● سید امیرمحمد سید شاکری

هندسه

مسئول درس: محمدرضا صیدآبادی
دستیار: هادی کاظم نژادسیدمحسن میراسلامی ● امیدرضا پورحسینی ● هادی کاظم نژاد
سعید اکبرزادهریاضیات
گسسته

مسئول درس: حسین اسدزاده

سعید اکبرزاده ● سوگند روشنی ● پرمیدا هادی پور

ریاضی
تجربیمسئول درس: امیرحسین شریفیان
دستیار: امین کبیری

ایمان اردستانی ● محمد خان گلدی

ریاضی
انسانیمسئول درس: عباس سعیدی
دستیار: امیرحسین حریریامیدرضا پورحسینی ● محمد منتظران ● حسین خواجه وند
حسین افسری ● مجید یوسف زادهزیست
شناسی

مسئول درس: علی جوهری

امیر کبیری راد ● منصوره رئیس دانا ● بتول خواجه پور

فیزیک

مسئول درس: مهدی نیکوگفتار

احمد رضوانی ● مهرناز طلوع شمس ● مریم حیدری
یوسف صباغی

شیمی

مسئول درس: محمد وحیدی

شهرام شاه پرویزی ● محمد وحیدی ● سبحان دقیق
محمدعلی توسلی فرزمین
شناسی

مسئول درس: شکبیا کریمی

فرزانه رجایی ● حسن علی محمدی

انسان و
محیط زیست

مسئول درس: شکبیا کریمی

محبوبه کاظمی

سلامت و
بهداشت

مسئول درس: علیرضا رضایی نیا

علیرضا رضایی نیا

گروه
علومسید محمد حسین کشانی
۱۳۹۴/۰۵/۰۱

طراحان

● معاون تولید محتوا: علی الفتی

● مدیر پروژه ارزشیابی تشریحی: سید ایمان مصلح

طراحان

طراحان

گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷گروه
عمومیادبیات
فارسیمسئولین درس:
عماد فیض آبادی
محسن ابراهیم تهرانیابوالفضل غلامی • افشین محی الدین • احسان محسنی
عماد فیض آبادی • محسن ابراهیم تهرانیدین و
زندگیمسئولین درس:
علی اکبر آخوندی
زهره محمدیمحمد کریمی • علیرضا دلشاد • علی اکبر آخوندی
زهره محمدی • محبوبه ابتهسامزبان
انگلیسی

مسئول درس: سعید ابراهیمی

علی عاشوری • سعید ابراهیمی • امین امیدوار

علوم و
فنون ادبی

مسئول درس: فاطمه اکران

فاطمه اکران • گلاویژ جلالی • مینا پژنگ
مهرآوه مجتهدجامعه
شناسیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفریفروغ تیموریان • آریتا بیدقی • علیرضا مختاری
الهام میرزایی • آزاده میرزایی • الهام رضاییروان
شناسیمسئول درس: سیده ضحی سکاکی
دستیار: حسین اصفهانی

مهدی پارچه باف

زبان
عربیمسئولین درس:
پویا رضاداد
مائده خدایاری
دستیار: سارا حمزهاسرافیل قربان پور • محسن احدی • کیارش پورمهدی
امینه کارآمد • زهرا فرزانه

تاریخ

مسئول درس: الناز گنج کار
دستیار: الهه ریاحی نسبمهسا اصغری • سامان بهری • زهره قموشی
الهه ریاحی نسب

جغرافیا

مسئول درس: وجیهه صادقی

بهرروز یحیی • مهسا اصغری • الهه ریاحی نسب

فلسفه
و منطق

مسئول درس: نگین تربتی

اکرم یاسری • حسین صادقی • سیاوش خداشناس

اقتصاد

مسئول درس: امیر محمدبیگی
دستیار: محمدرضا مبارکی

آیدانا رستمی

هویت
اجتماعیمسئول درس: الهام رضایی
دستیار: فاطمه صفری

رضا کیانپور

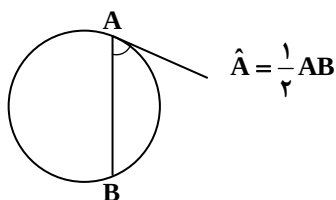
گروه: علی اکبر آخوندی
مدیر: ۱۳۹۷



-۱

الف) نادرست

نکته: اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه.



ب) درست

نکته: در دایره $C(O, r)$ ، اگر $AB > CD$ و تنها اگر $OH < OH'$ و OH' فاصله O

از دو وتر AB و CD هستند.

$$AB > CD \Leftrightarrow OH < OH'$$

پ) نادرست

نکته: در دو دایره مماس خارج، طول مماس مشترک خارجی از رابطه $TT' = 2\sqrt{RR'}$ به دست می‌آید.

ت) درست

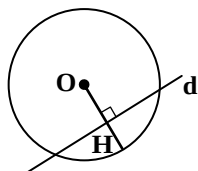
-۲

الف) مماس

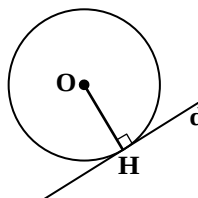
نکته: یک خط و یک دایره نسبت به هم سه حالت دارند.

اگر d یک خط و $C(O, r)$ یک دایره و نقطه H پای عمودی باشد که از نقطه O بر خط d رسم می‌شود، داریم:

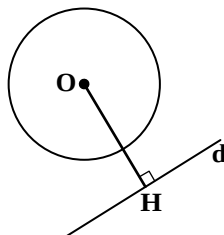
۱) اگر فاصله خط d از مرکز دایره از شعاع کمتر باشد ($OH < r$)، خط و دایره دو نقطه اشتراک دارند؛ یعنی متقاطع‌اند.



۲) اگر فاصله خط از مرکز دایره با شعاع برابر باشد ($OH = r$)، خط و دایره یک نقطه اشتراک دارند؛ یعنی مماس‌اند.



۳) اگر فاصله خط از مرکز دایره از شعاع بزرگ‌تر باشد ($OH > r$)، خط و دایره نقطه اشتراک ندارند؛ یعنی متخارج‌اند.

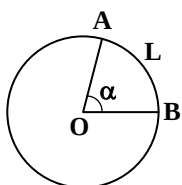


ب) ۴۵

نکته: ناحیه‌ای از درون و روی دایره را که به دو شعاع دایره و آن دایره محدود است یک قطاع دایره می‌نامند. اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O, R)$ بر حسب درجه مساوی α باشد، طول کمان AB برابر است با:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180} \text{ و مساحت قطاع برابر است با: } S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

بنابراین می‌توان با توجه به نکته بالا اندازه زاویه را به دست آورد:



$$\frac{\theta}{360} = \frac{\frac{1}{2}(2\pi R)}{2\pi R} \Rightarrow \theta = \frac{360}{8} = 45^\circ$$

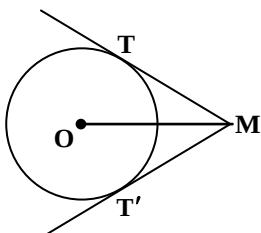
$\Rightarrow$ اندازه کمان = 45°

پ) دو («فقط دو»)

نکته: هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, r)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم T و T' نقاط تماس باشند، آن‌گاه:

الف) اندازه‌های دو مماس برابرند. $MT = MT'$

ب) نیم خط MO نیمساز زاویه TMT' است.



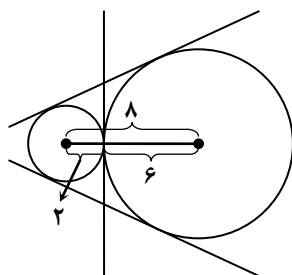


ت) ۳

نکته (حالت های دو دایره نسبت به هم):
 دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می گیریم.
 حالت های مختلفی که این دو دایره می توانند نسبت به هم داشته باشند، به صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره های هم مرکز

با توجه به نکته بالا، چون $d = R + R'$ ، دو دایره مماس بیرونی هستند و سه مماس مشترک (۲ مماس مشترک خارجی و ۱ مماس مشترک داخلی) دارند.

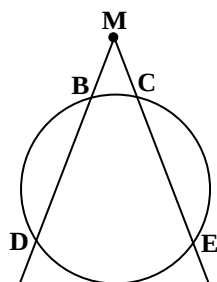


۳-

الف) گزینه ۱؛ زیرا:

نکته: زاویه ای که از برخورد امتداد های دو وتر در خارج دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

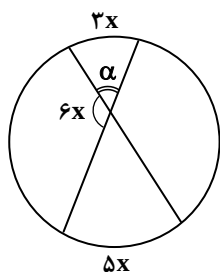
$$\hat{M} = \frac{1}{2}(DE - BC)$$



بنابراین داریم:

$$\alpha = \frac{3x + 5x}{2} = 4x$$

$$\alpha + 6x = 180^\circ \Rightarrow 4x + 6x = 180^\circ \Rightarrow 10x = 180^\circ \Rightarrow x = 18^\circ$$





ب) گزینه ۴

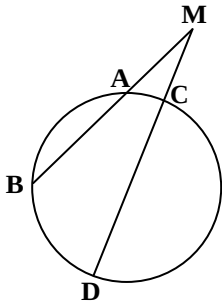
نکته: مساحت قطاعی از دایره به شعاع R و روبه‌رو به زاویه مرکزی θ برابر $\frac{\pi R^2}{360} \theta$ است.

بنابراین داریم:

$$S = \frac{\pi(10)^2}{360} \times 72 = \frac{7200\pi}{360} = 20\pi$$

پ) گزینه ۳

نکته: هرگاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M بیرون دایره یکدیگر را قطع کنند، آن‌گاه: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



پس می‌توان نوشت:

$$8(8+x) = 6 \times (6+10) \Rightarrow 8(8+x) = 6 \times 16 \Rightarrow 8+8 = 12 \Rightarrow x = 4$$

ت) گزینه ۳

نکته (حالت‌های دو دایره نسبت به هم):

دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ را با فرض $R > R'$ و $OO' = d$ در نظر می‌گیریم. حالت‌های مختلفی که این دو دایره می‌توانند نسبت به هم داشته باشند، به‌صورت زیر است:

	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (متخارج)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

پس می‌توان نتیجه گرفت:

$$7-3 < 8 < 7+3 \\ 4 < 8 < 10 \quad \checkmark$$

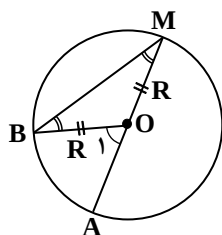
-۴

الف) زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار دارد و دو ضلع آن دو وتر از دایره هستند.

ب) خط یا پاره‌خطی که بر هر دو دایره مماس است و دو دایره در یک طرف آن قرار دارند.

-۵

اثبات: از O به B وصل می کنیم:



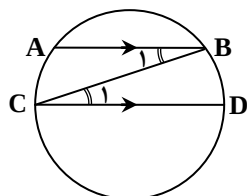
$$OM = OB = R \Rightarrow \hat{M} = \hat{B} \quad (1)$$

$$\triangle OMB: \hat{O}_1 = \hat{M} + \hat{B} \xrightarrow{(1)} \hat{O}_1 = 2\hat{M}$$

$$\hat{O}_1 \text{ مرکزی} \Rightarrow \hat{O}_1 = AB \Rightarrow AB = 2\hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \frac{AB}{2}$$

-۶

مرحله اول:

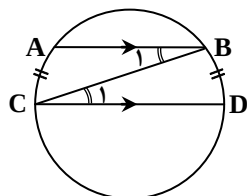


$$AB \parallel CD \Rightarrow AC = BD \quad (\text{حکم}) \quad (\text{فرض})$$

اثبات: طبق قضیه خطوط موازی و مورب، داریم:

$$\hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} \Rightarrow AC = BD \quad \checkmark$$

مرحله دوم:



$$AC = BD \Rightarrow AB \parallel CD \quad (\text{حکم}) \quad (\text{فرض})$$

اثبات:

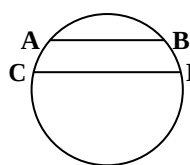
$$AC = BD \Rightarrow \frac{AC}{2} = \frac{BD}{2} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \quad \text{مخاطی}$$

پس طبق عکس قضیه خطوط موازی، داریم:

$$AB \parallel CD \quad \checkmark$$

-۷

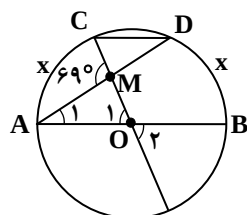
نکته: دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی کنند با هم موازی اند، اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آن ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow AC = BD$$

روش اول:

دایره را مطابق شکل کامل کرده و وتر CO را امتداد داده تا دایره را در نقطه E قطع کند. با توجه به نکته بالا $AC = DB = x$

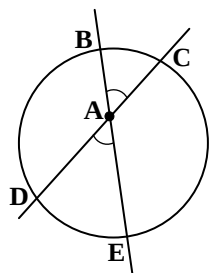


شکل (۱)

$$\begin{cases} \hat{O}_1 \text{ مرکزی} = AC = x \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \Rightarrow \hat{O}_2 = x = BE$$

نکته: زاویه ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{DAE} = \hat{BAC} = \frac{1}{2}(BC + DE)$$



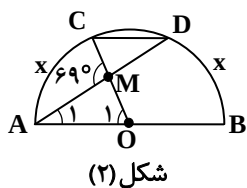
$$\hat{M} = \frac{AC + DBE}{2} = \frac{AC + DB + BE}{2}$$

$$69^\circ = \frac{x + x + x}{2} \Rightarrow 138^\circ = 3x \Rightarrow x = 46^\circ = AC = BD$$

$$CD = 180^\circ - \underbrace{(AC + BD)}_{92^\circ} = 88^\circ$$



روش دوم:



$$AC = DB = x$$

$$\triangle MAO: \hat{M} = \hat{A}_1 + \hat{O}_1 \Rightarrow 69^\circ = \frac{x}{2} + x \Rightarrow 69^\circ = \frac{3}{2}x \Rightarrow x = 46^\circ = AC = BD$$

مرکزی محاطی خارجی

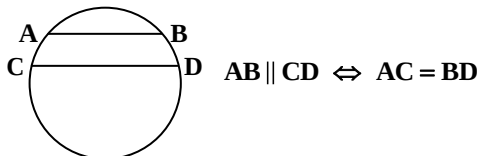
$$\Rightarrow CD = 180 - \underbrace{(AC + BD)}_{92^\circ} = 88^\circ$$

شکل (۲)

-۸

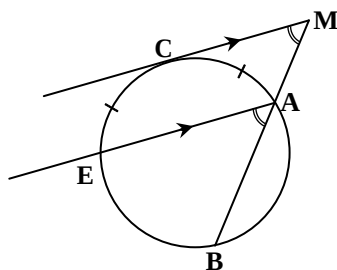
راه حل اول:

نکته: دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی کنند با هم موازی اند، اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آن ها مساوی باشد.



$$AB \parallel CD \Leftrightarrow AC = BD$$

با توجه به نکته بالا می توان به صورت زیر مسأله را حل کرد.



$$\hat{M} = \frac{BC - AC}{2} \quad \text{حکم}$$

اثبات: از A موازی MC رسم می کنیم تا دایره را در E قطع کند، داریم:

$$MC \parallel AE \Rightarrow AC = EC \quad (1)$$

$$\hat{M} = \hat{A} \quad (2) \quad \text{طبق قضیه خطوط موازی و مورب}$$

$$\hat{A}_{\text{محاطی}} = \frac{BE}{2} \xrightarrow[(2)]{(1)} \hat{M} = \frac{BC - EC}{2} = \frac{BC - AC}{2} \quad \checkmark$$

راه حل دوم:

نقطه B را به نقطه C وصل می کنیم. MC مماس بر دایره است، پس $\hat{C}_1$ زاویه ظلی است.

$$\hat{C}_1 (\text{ظلی}) = \frac{BC}{2}, \quad \hat{B} (\text{محاطی}) = \frac{AC}{2} \quad (1)$$

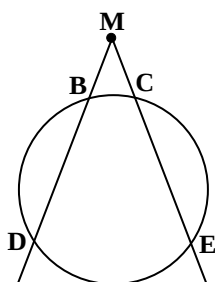
$$\triangle MCB \text{ مثلث خارجی } \hat{C}_1 = \hat{B} + \hat{M} \Rightarrow \hat{M} = \hat{C}_1 - \hat{B}$$

$$\xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{BC}{2} - \frac{AC}{2} = \frac{BC - AC}{2}$$

-۹

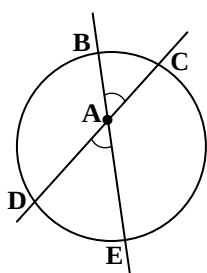
نکته: زاویه ای که از برخورد امتدادهای دو وتر در خارج دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(DE - BC)$$



نکته: زاویه ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره تشکیل می شود، از رابطه زیر به دست می آید:

$$\hat{DAE} = \hat{BAC} = \frac{1}{2}(BC + DE)$$





بنابراین می توان نوشت:

$$\Delta_0 = \frac{QM + MN + NP - QP}{2}$$

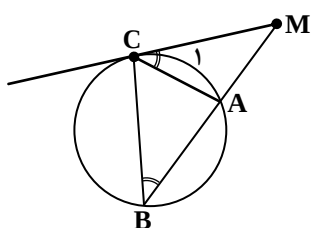
$$\Delta_{10} = \frac{MQ + QP + PN - MN}{2}$$

دو رابطه را با هم جمع می کنیم:

$$150^\circ = \frac{2QM + 2NP}{2} \Rightarrow 150^\circ = QM + NP$$

$$x = \frac{QM + NP}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

-۱۰



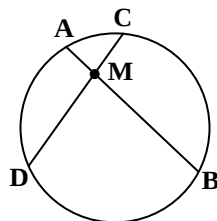
حکم : $MC^2 = MA \times MB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{C}_1 = \hat{C}_2 \text{ محاطی} \\ \hat{M} \text{ مشترک} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو زاویه}} \triangle MCB \sim \triangle MCA \Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MB}{MC} = \frac{BC}{AC}$$

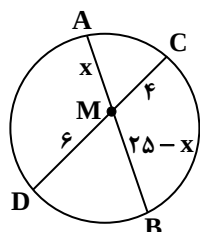
$$\Rightarrow MC^2 = MA \times MB \quad \checkmark$$

-۱۱

نکته: هرگاه خطهای شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M درون دایره یکدیگر را قطع کنند. آنگاه $MA \cdot MB = MC \cdot MD$



اولاً وتر CD به طول ۱۰ به نسبت $\frac{3}{5}$ و $\frac{2}{5}$ تقسیم می شود، پس:



$$MC = \frac{3}{5} \times 10 = 6, \quad MD = \frac{2}{5} \times 10 = 4$$

ثانیاً به کمک روابط طولی در دایره، داریم:

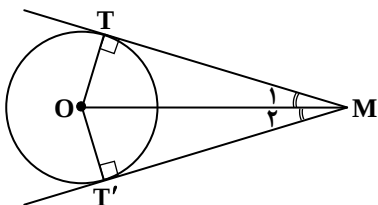
$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow x(25 - x) = 6 \times 4 \Rightarrow 25x - x^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 25x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 24 \end{cases} \Rightarrow MA = 1, \quad MB = 24$$

یعنی وتر CD و تر AB را به نسبت ۱ به ۲۴ تقسیم می کند.

-۱۲

اثبات:

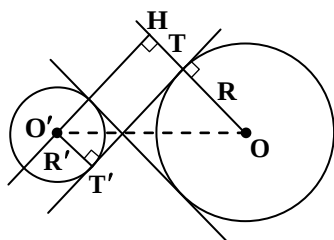


$$\left. \begin{array}{l} \hat{T} = \hat{T}' = 90^\circ \\ \text{OM مشترک} \\ OT = OT' = R \text{ (شعاع دایره)} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OMT \cong \triangle OMT' \Rightarrow MT = MT'$$

-۱۳

نکته: در دو دایره متخارج، دو مماس مشترک خارجی و خط المרכזین در یک نقطه همرس هستند و اندازه مماس مشترک خارجی از رابطه زیر به دست می آید.

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$



نکته: در دو دایره متخارج، دو مماس مشترک داخلی و خط‌المركزین در یک نقطه هم‌رس هستند و اندازه مماس مشترک داخلی از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

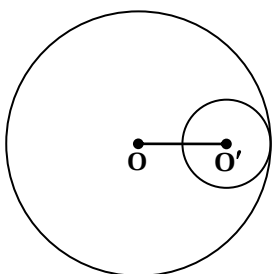
$$TT' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} 4\sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{256 - (R - R')^2} \\ 2\sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{256 - (R + R')^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \begin{cases} 240 = 256 - (R - R')^2 \\ 60 = 256 - (R + R')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (R - R')^2 = 16 \\ (R + R')^2 = 196 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جنر}} \begin{cases} R - R' = 4 \\ R + R' = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 9 \\ R' = 5 \end{cases}$$

-۱۴



$$d = R - R' = 2$$

$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 28\pi \Rightarrow \pi(R - R')(R + R') = 28\pi \Rightarrow 2(R + R') = 28$$

$$\Rightarrow R + R' = 14 \Rightarrow \begin{cases} R + R' = 14 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 8 \\ R' = 6 \end{cases}$$